Title	Eigenwertproblem ノ一証明 (訂正)
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 182 p.306-p.311
Issue Date	1939-07-20
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74726
rights	
Note	

795. Eigenwertproblem ノ一證明（訂正）

中野　秀五郎

(1°) §7ノ訂正。　§7ニテ Neumann ノ定理トシ，可附番個ノ互ニ commutative ナ Normaloperator $H_1, H_2, \ldots\ldots$ ハ適當ナルーツノ normal operator ノ函數デアル所ノ可附番個ハ不必要デアル。如何トナレバ Commutative Ring ハ常ニ separable ナルコトガ次ノ如クニシテ證明サレル。

今 $\{F\}$ ヲ Projective Operator ノ Commutative Ring トスル。$f_1, f_2, \ldots\ldots$ ヲ Hilbertspase $\mathfrak{H}$ ニテ überal dicht ナリトス。然シテ $\{F\}$ ノ總テノ F ニ對シテ

$$(\|Ff_1\|^2, \ldots\ldots, \|Ff_n\|^2)$$

ナル n 次元空間ノ点集合ヲ考ヘルト，n 次元空間ハ separable ナルヲ以テ，可附デ überall dicht ナル様ナ $F_{n,1}, F_{n,2}, \ldots\ldots$ ガ存在ス。然ルトキハ

$$F_{i,j} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots\ldots \\ j=1,2,\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

ナル Operator ガ $\{F\}$ ニテ überal dicht デアル。如何トナレバ $\{F\}$ ニ屬スル任意ノ F ニ對シ

$$\left| \|F_{m,j} f_i\|^2 - \|Ff_i\|^2 \right| < \varepsilon_n \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

ニシテ，且ツ

$$\| Ff_i - f_{k_i} \| < \varepsilon_n \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ナル $f_1, f_2, \cdots\cdots$ 内ノ f_{k_i} ニ對シテモ

$$\left| \| F_{m,j} f_{k_i} \|^2 - \| F f_{k_i} \|^2 \right| < \varepsilon_n$$

$$(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ナルガ如キ $F_{m,j}$ ガ存在ス. 此ノ $F_{m,j}$ ヲ $F^{(n)}$ ト記セバ, 上ノ三ツノ不等式ヨリ

$$\left| \| F^{(n)} f_i \|^2 - \| F f_i \|^2 \right| < \varepsilon_n$$

$$\left| F^{(n)} F f_i - F^{(n)} f_{k_i} \right| < \varepsilon_n, \quad \left| F f_i - F f_{k_i} \right| < \varepsilon_n$$

$$\left| \| F^{(n)} f_{k_i} \|^2 - \| F f_{k_i} \|^2 \right| < \varepsilon_n$$

從ツテ

$$\left| \| F^{(n)} F f_i \|^2 - \| F^{(n)} f_{k_i} \|^2 \right| < \varepsilon_n$$

$$\left| \| F f_i \|^2 - \| F f_{k_i} \|^2 \right| < \varepsilon_n$$

故ニ

$$\left| \| F^{(n)} F f_i \|^2 - \| F f_i \|^2 \right| < 3 \varepsilon_n$$

又

$$\| F^{(n)} F f_i \|^2 > \| F f_i \|^2 - 3 \varepsilon_n$$

$$\therefore \quad \| F^{(n+1)} F f_i \|^2 > \| F f_i \|^2 - 3 \varepsilon_{n+1}$$

$$\therefore \quad \| F^{(n)} F f_i \|^2 + \| F^{(n+1)} F f_i \|^2 > 2 \| F f_i \|^2 - 3 (\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1})$$

即チ、

$$\| (F^{(n)} - F^{(n)} F^{(n+1)}) F f_i \|^2 + \| (F^{(n+1)} - F^{(n)} F^{(n+1)}) F f_i \|^2 + 2 \| F^{(n)} F^{(n+1)} F f_i \|^2 \geqq 2 \| F f_i \|^2 - 3 (\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1})$$

然ルニ

$$\|(F^{(n)}-F^{(n)}F^{(n+1)})Ff_i\|^2+\|(F^{(n+1)}\quad F^{(n)}F^{(n+1)})\|^2$$

$$+\|F^{(n)}F^{(n+1)}Ff_i\|^2\leqq\|Ff_i\|^2$$

$$\therefore\quad \|F^{(n)}F^{(n+1)}Ff_i\|^2\geqq\|Ff_i\|^2-3(\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1})$$

同様ニシテ

$$\|(F^{(n)}F^{(n+1)}\cdots\cdots)Ff_i\|^2\geqq\|Ff_i\|^2-3(\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}+\cdots)$$

$$\therefore\quad \|(\lim_{n\to\infty}F^{(n)})Ff_i\|^2\geqq\|Ff_i\|^2-3(\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}+\cdots)$$

$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\cdots$ ヲ収斂スル如ク取レバ

$$\|(\lim_{n\to\infty}F^{(n)})Ff_i\|^2\geqq\|Ff_i\|^2\qquad(i=1,2,\cdots\cdots)$$

然ルニ

$$\|(\lim_{n\to\infty}F^{(n)})f_i\|^2\leqq\lim_{n\to\infty}\|F^{(n)}f_i\|^2=\|Ff_i\|^2$$

ナルベキニヨリ

$$\|(\lim_{n\to\infty}F^{(n)})f_i\|^2=\|Ff_i\|^2$$

f_i ハ überal dicht ナレニヨリ

$$\lim_{n\to\infty}F^{(n)}=F$$

故ニ, $F^{(1)}, F^{(2)}, \cdots\cdots\cdots$ ハ $\{F\}$ 内ニテ überal dicht ナリ。

2°. §6ニ於テ Ring $\{E\}$ ト Commutative ニシテ $\{E\}$ ニ含マレザル F ニ對シテハ $\{E\}$ ト Commutative ニシテ F ト Commutative ナラザル P ガ存在スル。トイフ定理ノ証明中ニテ、F ノ manifold 内ノ element f_i, $1-F$ ノ manifold 内ノ element g_j ニ對シ、E ヲ $\{E\}$ ノ総テニシタ時ニ $E(f_i+g_j)$

ヨリ作ラレル closed linear manifold ト F トガ commutative ナル時ニハ

$$F(f_i+g_i)=E_{i,j}(f_i+g_j)$$

ナル $E_{i,j}$ ガ存在ストセシガ此レハ正シカラズ。故ニ次ノ如クニ改ム。$\{E\}$ ヲ §7 ノ定理ニテ bounded Hermition ノ measure Operator $E(z)$ トスレバ（normal ノ場合ヲ証明セシガ円ノカハリニ実軸上ノ線分ヲ取レバ Hermition トナル）

Stone ノ定理ヨリ、$E(z)(f_i+g_j)$ ニテ作ラル closed linear manifold 内ノ任意ノ element f ハ

$$(f,g)=\int \Phi_f(z)\,d\big(E(z)(f_i+g_i),g\big)$$

ニテ與ヘラルヽガ如キ measurable function $\Phi_f(z)$ ガ存在ス。コノ定理ヨリ、F ト $E(z)(f_i+g_i)$ ヨリ作ラル closed linear manifold ノ Projective Operator ガ Commutative ナラバ（後者ガ $\{E\}$ ト commutative ナコトハ明カ）

$$\big(F(f_i+g_i),g\big)=\int \Phi(z)\,d\big(E(z)(f_i+g_i),g\big)$$

ナル $\Phi(z)$ ガ存在ス。故ニ

$$\|F(f_i+g_i)\|^2=\int\|\Phi(z)\|^2 d\,\|E(z)(f_i+g_i)\|^2$$

$$=\int\|\Phi(z)\|^2 d\,\|E(z)f_i\|^2+\int\|\Phi(z)\|^2 d\,\|E(z)g_i\|^2$$

然ルニ、$F(f_i+g_i)=Ff_i$. g ノ所ヘ Fg ヲ入レテ

$$(Ff_i, g)=\int \Phi(z)\, d(E(z)f_i, g)$$

従ッテ

$$\|Ff_i\|^2=\int |\Phi(z)|^2\, d\|E(z)f_i\|^2$$

故ニ

$$\int |\Phi(z)|^2\, d\|E(z)g_i\|^2=0$$

$|\Phi(z)|^2>0$ ナル z ノ集合ヲ Z_0 トスレバ，従ッテ

$$\|E(Z_0)f_i\|^2=0 \qquad \therefore\ E(Z_0)f_i=0$$

又

$$((1-E(Z_0))Ff_i, g)=\int_{Z_0\,ノ\,\mathrm{Complement}} |\Phi(z)|^2\, d(E(z)f_i, g)=0$$

$$\therefore\ (1-E(Z_0))Ff_i=0$$

$$\therefore\ E(Z_0)f_i=f_i \qquad (\because\ Ff_i=f_i)$$

此ノ $E(Z_0)$ ヲ $E_{i,j}$ トスレバ

$$E_{i,j}f_i=f_i,\quad E_{i,j}g_j=0$$

トナリテ、後ハ前ノ証明ニテ可ナリ。

§6, §7 ニテハ Hilbert space ノミニテ考ヘシモ、一般 Euclid pace ニ對シテハ Ring ノ separability ヲ次ノ如クニ定義スレバ、§6, §7 ノ大部分ハ同様ニシテ拡張デキル。

定義. Ring $\{E\}$ ガ separable トハ $\{E\}$ ノ

中ニテ高々可附番個ノ E_1, E_2, ----- ヲ取ルトキ, E_1, E_2, ------ヲ含ム最小 Ring ガ $\{E\}$ ト一致スルコトナリ。

measure operator $E(z)$ ガ separable ナルコトハ中心, 半徑ガ有理數ナルガ如キ円ヲ考フレバ明カナリ。又 Ring $\{E\}$ ハ必ズシモ separable デナイコトハ, orthogonal System $\{f\}$ ガ可附以上ナルトキ此等ヨリ作ラレル Ring ハ明カニ separable ナラズ。

又此処ニテ訂正セル定理ノ証明ハ, ウマク行カズ目下研究中ナリ。